# O zastosowaniach twierdzeń o punktach stałych*

Marcin Borkowski

**Streszczenie**

Wszyscy znamy twierdzenie Banacha o kontrakcji czy twierdzenie Brouwera o punkcie stałym. Stosunkowo rzadko jednak mamy okazję zobaczyć je przy pracy. Celem niniejszego referatu nie jest w żadnym przypadku próba przedstawienia całościowego poglądu na teorię punktu stałego jako taką, do czego nie czuję się zresztą kompetentny, lecz raczej pokazanie dwóch jej klasycznych rezultatów: twierdzeń Banacha i Schaudera (które uogólnia twierdzenie Brouwera), oraz ich przykładowych zastosowań. Jako bonus opowiem też trochę o kilku mniej znanych twierdzeniach związanych z tymi wynikami.

Referat oparty jest na monografii A. Granasa i J. Dugundji'ego „Fixed point theory" (PWN, Warszawa 1982).

## 1. Twierdzenie Banacha o kontrakcji

### 1.1. Sformułowanie i dowód twierdzenia

**Twierdzenie 1** (Banacha o kontrakcji)**.** *Niech $F\colon X \to X$ będzie kontrakcją przestrzeni metrycznej zupełnej w siebie. Wówczas $F$ ma jedyny punkt stały $x_0$; co więcej, dla dowolnego $x \in X$ zachodzi $\lim_n F^n(x) = x_0$.*

*Dowód.* Niech $k \in (0,1)$ będzie stałą Lipschitza dla $F$. Obierzmy $x \in X$. Mamy $d(F^n(x), F^{n+1}(x)) \leqslant k^n d(x, F(x))$. Stąd otrzymujemy $d(F^m(x), F^{m+p}(x)) \leqslant \sum_{n=m}^{p-1} k^n d(x, F(x)) \leqslant \sum_{n=m}^{\infty} k^n d(x, F(x)) = \frac{k^m}{1-k} d(x, F(x)) \to 0$, zatem ciąg $(F^n(x))$ jest ciągiem Cauchy'ego. Niech $x_0 = \lim_n F^n(x)$. Mamy $F(F^n(x)) \to F(x_0)$; ale $F(F^n(x)) = F^{n+1}(x) \to x_0$ i stąd $x_0 = F(x_0)$. Wreszcie, gdyby $y_0$ było innym punktem stałym funkcji $F$, byłoby $d(x_0, y_0) \leqslant kd(F(x_0), F(y_0)) < d(x_0, y_0)$ – sprzeczność. □

### 1.2. Rezultaty pokrewne

**Wniosek 2** (lokalna wersja twierdzenia Banacha)**.** *Niech $X$ będzie zupełną przestrzenią metryczną, a $F\colon B(u,r) \to X$ będzie kontrakcją ze stałą Lipschitza $k$. Jeśli $d(u, F(u)) < (1-k)r$, to $F$ ma punkt stały.*

**Twierdzenie 3** (Browdera)**.** *Niech $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ będzie funkcją niemalejącą, prawostronnie ciągłą i spełniającą nierówność $\varphi(t) < t$ dla $t > 0$. Załóżmy, że $F\colon X \to X$ jest odwzorowaniem przestrzeni metrycznej zupełnej $X$ w siebie spełniającym warunek $d(F(x), F(y)) \leqslant \varphi(d(x,y))$. Wówczas $F$ ma jedyny punkt stały $x_0$ oraz $\lim_n F^n(x) = x_0$ dla dowolnego $x \in X$.*

**Twierdzenie 4** (Browdera–Goehde'a–Kirka)**.** *Nierozszerzające odwzorowanie niepustego, domkniętego, ograniczonego i wypukłego podzbioru przestrzeni Hilberta w siebie ma punkt stały.*

**Twierdzenie 5** (Bessagi)**.** *Niech $F\colon X \to X$ będzie takim odwzorowaniem zbioru $X$ w siebie, że każda iteracja $F^n$ dla $n \in \mathbb{N}$ ma dokładnie jeden punkt stały. Wówczas dla dowolnej stałej $k \in (0,1)$ istnieje zupełna metryka na $X$, względem której $F$ jest kontrakcją ze stałą Lipschitza $k$.*

* Referat wygłoszony 27 marca 2007 r. w ramach prac Grupy Aktywnych Doktorantów „GAD" na Wydziale Matematyki i Informatyki UAM w Poznaniu.

**Twierdzenie 6** (Meyersa)**.** *Niech $(X,d)$ będzie zupełną przestrzenią metryczną, a $F\colon X \to X$ odwzorowaniem spełniającym następujące warunki:*

(1) *$F(x_0) = x_0$ dla pewnego $x_0 \in X$;*
(2) *$\lim_n F^n(x) = x_0$ dla każdego $x \in X$;*
(3) *istnieje takie otoczenie $U$ punktu $x_0$, że dla dowolnego otoczenia $V$ tego punktu istnieje taki indeks $n_V$, że $F^n(V) \subset U$ dla $n \geqslant n_V$.*

*Wówczas dla dowolnej stałej $k \in (0,1)$ istnieje równoważna z $d$ metryka zupełna na $X$, przy której $F$ jest kontrakcją ze stałą $k$.*

*Uwaga* 1. Twierdzenia Bessagi i Meyersa pokazują, że w pewnym sensie twierdzenia Banacha o kontrakcji nie da się „ulepszyć”.

### 1.3. Zastosowania

**Twierdzenie 7** (o zachowaniu otwartości)**.** *Niech $V$ będzie otwartym podzbiorem przestrzeni Banacha $X$ i $F\colon V \to X$ będzie kontrakcją. Wówczas odwzorowanie $f\colon V \to X : x \mapsto x - F(x)$ jest otwarte; w szczególności, $W := f(V)$ jest otwarty w $X$ i $f\colon V \to W$ jest homeomorfizmem.*

*Dowód.* Niech $k$ będzie stałą Lipschitza odwzorowania $F$. Wykażemy wpierw otwartość $f$; dokładniej, pokażemy, że dla dowolnego $u \in V$, jeśli $B(u,r) \subset V$, to $B(f(u),(1-k)r) \subset f(B(u,r))$. Niech $y_0 \in B(f(u),(1-k)r)$. Zdefiniujmy odwzorowanie $G\colon B(u,r) \to X$ wzorem $G(y) := y_0 + F(y)$; wówczas $G$ jest również kontrakcją ze stałą $k$ i $\|u - G(u)\| = \|y_0 + F(u) - u\| = \|y_0 - f(u)\| < (1-k)r$. Na mocy wniosku 2 istnieje takie $u_0 \in B(u,r)$, że $u_0 = y_0 + F(u_0)$, czyli $y_0 = f(u_0)$. To zaś oznacza, że $y_0 \in f(B(u,r))$.

Pozostaje wykazać iniektywność $f$. Mamy:

$$\begin{aligned}\|u-v\| &= \|f(u) - f(v) + F(u) - F(v)\| \leqslant \\ &\leqslant \|f(u) - f(v)\| + \|F(u) - F(v)\| \leqslant \\ &\leqslant \|f(u) - f(v)\| + k\|u-v\|,\end{aligned}$$

a zatem $\|f(u) - f(v)\| \geqslant (1-k)\|u-v\|$. □

**Twierdzenie 8** (o funkcji odwrotnej)**.** *Niech $U$ będzie otwartym podzbiorem przestrzeni Banacha $X$, a $f\colon U \to X$ – odwzorowaniem klasy $\mathcal{C}^{(1)}$. Załóżmy, że dla pewnego $x_0$, pochodna $Df(x_0)\colon X \to X$ jest izomorfizmem. Istnieją wówczas takie otoczenia: $V$ punktu $x_0$ i $W$ punktu $f(x_0)$, że:*

(1) *$Df(x)\colon X \to X$ jest odwracalny dla każdego $x \in V$;*
(2) *$f|_V\colon V \to W$ jest homeomorfizmem;*
(3) *odwrócenie $g\colon W \to V$ odwzorowania $f|_V$ jest różniczkowalne dla każdego $w \in W$ oraz $Dg(w) = (Df(gw))^{-1}$;*
(4) *odwzorowanie $w \mapsto Dg(w)$ zbioru $W$ w przestrzeń $\mathcal{L}(X,X)$ jest ciągłe.*

*Dowód.* Rozpatrzmy wpierw przypadek, gdy $x_0 = f(x_0) = 0$ i $Df(0) = I$. Ponieważ zbiór wszystkich odwracalnych operatorów liniowych ciągłych jest otwarty w $\mathcal{L}(X,X)$, $x \mapsto Df(x)$ jest ciągłe i $Df(0)$ jest odwracalny, istnieje taka kula $B \subset U$ zawierająca zero, że operator $Df(x)$ jest odwracalny dla każdego $x \in B$. Określmy $F\colon B \to X$ wzorem $F(x) := x - f(x)$. Wówczas $F$ jest klasy $\mathcal{C}^{(1)}$, $DF(0) = 0$ i istnieje taka kula $V \subset B$ zawierająca zero, że $M := \sup\{\|DF(x)\| : x \in V\} < \frac{1}{2}$. Z twierdzenia o wartości średniej mamy dla $u, v \in V$:

$$\|F(u) - F(v)\| \leqslant M\|u-v\| < \tfrac{1}{2}\|u-v\|,$$

więc $F|_V$ jest kontrakcją. Na mocy twierdzenia 7, $f|_V\colon V \to W := f(V)$ jest homeomorfizmem na zbiór $W$; oczywiście $0 \in W$. Dowód części (1) i (2) jest zakończony.

Zauważmy, że jak w końcówce dowodu twierdzenia 7 można pokazać, że dla $u, v \in V$ zachodzi nierówność $\|u - v\| \leqslant 2\|f(u) - f(v)\|$. Uzbrojeni w tę obserwację, pokażemy punkt (3). Niech $g\colon W \to V$ będzie odwróceniem $f|_V$.

Dla $y, b \in W$, połóżmy $a := g(b)$, $x := g(y)$ i $T := Df(a)$. Ponieważ $f$ jest różniczkowalna w $a$, więc

$$f(x) - f(a) = T(x-a) + \varphi_a(x) \quad \text{oraz} \quad \frac{\|\varphi_a(x)\|}{\|x-a\|} \to 0, \text{ gdy } \|x-a\| \to 0.$$

Działając na obie strony operatorem $T^{-1}$, otrzymujemy

$$T^{-1}(y-b) = g(y) - g(b) + T^{-1}\varphi_{g(b)}(g(y)),$$

a więc wystarczy pokazać, że

$$R_b(y) := \frac{\|T^{-1}\varphi_{g(b)}(g(y))\|}{\|y-b\|} \to 0, \quad \text{gdy} \quad \|y-b\| \to 0.$$

Ponieważ $g\colon W \to V$ jest bijekcją, mamy:

$$\begin{aligned} R_b(y) &\leqslant \frac{\|T^{-1}\varphi_{g(b)}(g(y))\|}{\|g(y)-g(b)\|} \cdot \frac{\|g(y)-g(b)\|}{\|y-b\|} \leqslant \\ &\leqslant 2\|T^{-1}\| \frac{\|\varphi_{g(b)}(g(y))\|}{\|g(y)-g(b)\|} = \\ &= 2\|T^{-1}\| \frac{\varphi_a(x)}{\|x-a\|}. \end{aligned}$$

Zatem, jeśli $\|y-b\| \to 0$, to dzięki ciągłości $g$ również $\|x-a\| \to 0$ i wówczas $R_b(y) \to 0$, co kończy dowód części (3).

Dla dowodu (4) wystarczy po prostu zauważyć, że odwzorowanie $w \mapsto Dg(w)$ jest następującym złożeniem odwzorowań ciągłych: $\mathrm{Inv} \circ Df \circ g$, i dowód twierdzenia w przypadku $x_0 = f(x_0) = 0$ i $Df(0) = I$ jest zakończony. Aby pokazać tezę w przypadku ogólnym, wystarczy zastosować powyższe rozumowanie dla odwzorowania $h(x) := (Df(x_0))^{-1}(f(x+x_0) - f(x_0)$. □

**Twierdzenie 9** (o istnieniu rozwiązania nieliniowego równania całkowego typu Volterry II rodzaju)**.** *Niech funkcja $K\colon [0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie ciągła i lipschitzowska ze względu na trzecią zmienną, tj. $|K(t,s,x) - K(t,s,y)| < L|x-y|$. Niech $v \in \mathcal{C}[0,T]$. Wówczas następujące nieliniowe równanie całkowe Volterry II rodzaju*

$$u(t) = v(t) + \int_0^t K(t,s,u(s))\,ds$$

*ma dokładnie jedno rozwiązanie $u_0 \in \mathcal{C}[0,T]$. Co więcej, dla dowolnej funkcji $u_1 \in \mathcal{C}[0,T]$, ciąg $(u_n)$, gdzie*

$$u_{n+1} := v(t) + \int_0^t K(t,s,u_n(s))\,ds,$$

*jest jednostajnie zbieżny do $u_0$.*

*Dowód.* Przenormujmy przestrzeń $\mathcal{C}[0,T]$ następująco:

$$\|g\| := \max_{t\in[0,T]} e^{-Lt}|g(t)|.$$

Ponieważ $e^{-Lt}\|g\|_\infty \leqslant \|g\| \leqslant \|g\|_\infty$, norma ta jest równoważna zwykłej normie supremalnej (w szczególności jest zupełna).

Zdefiniujmy operator $F\colon \mathcal{C}[0,T] \to \mathcal{C}[0,T]$ wzorem

$$F(g)(t) := v(t) + \int_0^t K(t,s,g(s))\,ds;$$

wystarczy pokazać, że $F$ jest kontrakcją. Obierzmy $g, h \in \mathcal{C}[0,T]$. Mamy:

$$
\begin{aligned}
\|F(g) - F(h)\| &= \max_{t\in[0,T]} e^{-Lt} \left| \int_0^t K(t,s,g(s)) - K(t,s,h(s))\, ds \right| \leqslant \\
&\leqslant \max_{t\in[0,T]} e^{-Lt} \int_0^t |K(t,s,g(s)) - K(t,s,h(s))|\, ds \leqslant \\
&\leqslant L \max_{t\in[0,T]} e^{-Lt} \int_0^t |g(s) - h(s)|\, ds \leqslant \\
&\leqslant L \max_{t\in[0,T]} e^{-Lt} \int_0^t e^{Ls} e^{-Ls} |g(s) - h(s)|\, ds \leqslant \\
&\leqslant L\|g - s\| \max_{t\in[0,T]} e^{-Lt} \int_0^t e^{Ls}\, ds = \\
&= L\|g - h\| \max_{t\in[0,T]} e^{-Lt} \frac{e^{Lt} - 1}{L} \leqslant \\
&\leqslant (1 - e^{-LT})\|g - h\|.
\end{aligned}
$$

□

*Uwaga* 2. Oczywiście, gdy $LT < 1$, trik z przenormowaniem jest zbędny.

## 2. Twierdzenie Schaudera o punkcie stałym

### 2.0. Preliminaria

**Twierdzenie 10** (Brouwera o punkcie stałym)**.** *Ciągłe odwzorowanie niepustego, domkniętego, ograniczonego i wypukłego podzbioru skończeniewymiarowej przestrzeni unormowanej w siebie ma punkt stały.*

**Definicja 1.** Niech $F\colon X \to Y$ będzie ciągłym odwzorowaniem między przestrzeniami topologicznymi $X$ i $Y$. Nazywamy je:
- *zwartym*, jeśli $F(X)$ jest warunkowo zwarty w $Y$;
- *pełnociągłym*, jeśli $X$ jest metryczna i obraz każdego zbioru ograniczonego w $X$ jest warunkowo zwarty w $Y$;
- skończeniewymiarowym, jeśli $Y$ jest liniowa i $F(X)$ zawiera się w pewnej podprzestrzeni $Y$ o wymiarze skończonym;
- *ograniczonym*, jeśli $Y$ jest metryczna i $F(X)$ jest ograniczony w $Y$.

*Uwaga* 3. Na mniej uważnego czytelnika czyha w powyższej definicji pułapka: *odwzorowanie* zwarte (odpowiednio: pełnociągłe, ograniczone) i *operator liniowy* zwarty (odpowiednio: pełnociągły, ograniczony) to nie jest to samo!

**Twierdzenie 11** (aproksymacyjne Schaudera)**.** *Niech $F\colon X \to C$ odwzorowuje przestrzeń topologiczną $X$ w pewien wypukły podzbiór $C$ przestrzeni unormowanej. Wówczas dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją: zbiór skończony $N \subset F(X)$ i takie odwzorowanie skończeniewymiarowe $F_\varepsilon\colon X \to C$, że $F_\varepsilon(X) \subset \operatorname{conv} N$ oraz $\|F_\varepsilon(x) - F(x)\| < \varepsilon$ dla każdego $x \in X$.*

**Definicja 2.** Niech $F\colon X \to X$ będzie odwzorowaniem przestrzeni metrycznej $X$ w siebie, a $\varepsilon$ liczbą dodatnią. Punkt $x \in X$ nazywamy *punktem $\varepsilon$-stałym* odzworowania $F$, gdy $d(x, F(x)) < \varepsilon$.

*Uwaga* 4. Niech $F\colon X \to X$ będzie zwartym odwzorowaniem przestrzeni metrycznej $X$ w siebie. Jeśli $F$ ma punkt $\varepsilon$-stały dla każdego $\varepsilon > 0$, to ma punkt stały. Istotnie, niech $x_n$ będzie $\frac{1}{n}$-punktem stałym odwzorowania $F$; bez utraty ogólności możemy założyć, że $F(x_n) \to x_0$. Wówczas mamy $d(x_n, x_0) \leqslant d(x_n, F(x_n)) + d(F(x_n), x_0) \to 0$, a zatem $F(x_n) \to F(x_0)$ i $x_0 = F(x_0)$.

### 2.1. Sformułowanie i dowód twierdzenia

**Twierdzenie 12** (Schaudera o punkcie stałym)**.** *Zwarte odwzorowanie niepustego i wypukłego podzbioru przestrzeni unormowanej w siebie ma punkt stały.*

*Dowód.* Niech $F\colon C \to C$ będzie odwzorowaniem, o jakim mowa w twierdzeniu. Obierzmy $\varepsilon > 0$ i niech $F_\varepsilon\colon C \to C$ będzie takim odwzorowaniem skończeniewymiarowym, że $\|F_\varepsilon(x) - F(x)\| < \varepsilon$ dla $x \in C$ oraz $F_\varepsilon(C) \subset \operatorname{conv} N \subset C$ dla pewnego zbioru skończonego $N$. Twierdzenie Brouwera zastosowane do odwzorowania $F_\varepsilon|_{\operatorname{conv} N}$ gwarantuje istnienie takiego punktu $x_0 \in C$, że $x_0 = F_\varepsilon(x_0)$, skąd otrzymujemy $\|x_0 - F(x_0)\| = \|F_\varepsilon(x_0) - F(x_0)\| < \varepsilon$. Wystarczy teraz skorzystać z Uwagi 4. □

### 2.2. Rezultaty pokrewne

**Wniosek 13.** *Ciągłe odwzorowanie niepustego, zwartego i wypukłego podzbioru przestrzeni unormowanej w siebie ma punkt stały.*

**Twierdzenie 14** (alternatywa nieliniowa)**.** *Niech $C$ będzie wypukłym podzbiorem przestrzeni unormowanej, $U$ zbiorem otwartym w $C$ zawierającym zero, zaś $F\colon \overline{U} \to C$ odzorowaniem zwartym. Wówczas $F$ ma punkt stały lub istnieje taki punkt $x \in \partial U$ i stała $\lambda \in (0,1)$, że $x = \lambda F(x)$.*

**Definicja 3.** Niech $A$ będzie ograniczonym podzbiorem przestrzeni metrycznej. Kres dolny zbioru takich liczb $\varepsilon > 0$, że $A$ można pokryć skończenie wieloma zbiorami o średnicy mniejszej niż $\varepsilon$, nazywamy *miarą niezwartości* (*Kuratowskiego*) zbioru $A$ i oznaczamy przez $\alpha(A)$.

**Twierdzenie 15** (Darbo)**.** *Niech $C$ będzie niepustym, domkniętym, ograniczonym i wypukłym podzbiorem przestrzeni Banacha. Załóżmy, że istnieje taka stała $k \in (0,1)$, że odwzorowanie ciągłe $F\colon C \to C$ spełnia warunek $\alpha(F(A)) \leqslant k\alpha(A)$ dla każdego $A \subset C$. Wówczas $F$ ma punkt stały.*

**Twierdzenie 16** (Sadowskiego)**.** *Niech $C$ będzie niepustym, domkniętym, ograniczonym i wypukłym podzbiorem przestrzeni Banacha. Załóżmy, że odwzorowanie ciągłe $F\colon C \to C$ spełnia warunek $\alpha(F(A)) < \alpha(A)$ dla każdego takiego $A \subset C$, że $\alpha(A) > 0$. Wówczas $F$ ma punkt stały.*

### 2.3. Zastosowania

**Twierdzenie 17** (Peano)**.** *Niech $g\colon [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i ograniczoną. Wówczas zagadnienie Cauchy'ego*

$$\begin{cases} u'(t) = g(t,u) & \text{dla } t \in [0,T] \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

*ma rozwiązanie klasy $\mathcal{C}^{(1)}[0,T]$.*

*Dowód.* Zdefiniujmy przestrzeń $\mathcal{C}_0^{(1)} := \{u \in \mathcal{C}^{(1)}[0,T] : u(0) = 0\}$ i unormujmy ją następująco: $\|u\|_{(1)} := \max\{\|u\|_\infty, \|u'\|_\infty\}$. Oznaczmy też $\mathcal{C} := \mathcal{C}[0,T]$. Rozważmy operator $L\colon \mathcal{C}_0^{(1)} \to \mathcal{C}\colon u \mapsto u'$. Oczywiście jest on bijekcją, ponieważ posiada operator odwrotny określony wzorem $L^{-1}f(t) := \int_0^t f(x)\,dx$. Mamy dla $u \in \mathcal{C}_0^{(1)}$ i $f = Lu$:

$$\begin{aligned} \|u\|_\infty = \|L^{-1}f\|_\infty = \sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t f(x)\,dx \right| &\leqslant \\ \leqslant \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t |f(x)|\,dx &\leqslant \\ \leqslant \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t \|f(x)\|_\infty\,dx &= T\|f\|_\infty = T\|Lu\|_\infty \end{aligned}$$

oraz $\|u'\|_\infty = \|Lu\|_\infty$ i w konsekwencji $\|u\|_{(1)} \leqslant \max\{T,1\}\|Lu\|_\infty$. Oznacza to, że operator $L^{-1}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_0^{(1)}$ jest ciągły.

Zdefiniujmy $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ wzorem $G(u)(t) := g(t, u(t))$ oraz niech $j\colon \mathcal{C}_0^{(1)} \to \mathcal{C}$ będzie inkluzją. Ograniczoność funkcji $g$ implikuje ograniczoność odzworowania $G$, zaś z lematu Arzeli wynika, że $j$ jest pełnociągła. Stąd odwzorowanie $jL^{-1}G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ jest zwarte. Na mocy twierdzenia Schaudera istnieje więc taka funkcja $u \in \mathcal{C}$, że $u = jL^{-1}G(u)$. Oznacza to, że $Lu = Gu$, czyli że $u$ jest rozwiązaniem zagadnienia $(*)$. $\square$

**Twierdzenie 18** (Łomonosowa)**.** *Niech $T$ będzie ciągłym operatorem liniowym na nieskończeniewymiarowej przestrzeni unormowanej $X$. Jeśli $T$ komutuje z pewnym niezerowym operatorem liniowym zwartym $K$, to ma nietrywialną domkniętą podprzestrzeń niezmienniczą.*

*Dowód.* Niech $\mathrm{Comm}(T)$ będzie zbiorem ciągłych operatorów liniowych komutujących z $T$. Dla $y \in X \setminus \{0\}$ oznaczmy $L_y := \{Ay : A \in \mathrm{Comm}(T)\}$. Każde $L_y$ jest podprzestrzenią liniową $B$-niezmienniczą dla dowolnego $B \in \mathrm{Comm}(T)$ (istotnie, niech $x \in B(L_y)$, czyli $x = BAy$ dla pewnego $A \in \mathrm{Comm}(T)$; ale $BA \in \mathrm{Comm}(T)$, więc $x \in L_y$). Nie może też być $L_y = \{0\}$, bo $I \in \mathrm{Comm}(T)$, więc $y \in L_y$. Możliwe są dwa przypadki: albo pewna podprzestrzeń $L_{y_0}$ nie jest gęsta w $X$, albo wszystkie $L_y$ są gęste. W pierwszym przypadku mamy $T(\overline{L_{y_0}}) \subset \overline{T(L_{y_0})} \subset \overline{L_{y_0}}$, więc $L_{y_0}$ jest szukaną podprzestrzenią. Załóżmy więc, że wszystkie $L_y$ są gęste w $X$.

Ponieważ $\ker K$ jest podprzestrzenią domkniętą $X$ różną od całej przestrzeni, więc istnieje kula $B = B(x_0, r) \subset X \setminus \ker K$. Ewentualnie zmniejszając promień, możemy założyć, że $0 \notin \overline{K(B)}$ oraz $0 \notin \overline{B}$. Wreszcie, $K$ jest operatorem liniowym zwartym, więc zbiór $\overline{K(B)}$ jest zwarty.

Skoro $L_y$ jest gęsta w $X$ dla $y \neq 0$, więc dla każdego $c \in \overline{K(B)}$ istnieje taki operator $D_c \in \mathrm{Comm}(T)$, że $D_c(c) \in B$. Z ciągłości $K$ wnosimy, że dla dowolnego $c \in \overline{K(B)}$ istnieje taka kula $B(c, \varepsilon_c)$, że $D_c(B(c, \varepsilon_c)) \subset B$. Wybierzmy skończone podpokrycie $\{B(c_1, \varepsilon_{c_1}), \ldots, B(c_n, \varepsilon_{c_n})\}$ zbioru $\overline{K(B)}$. Określmy na $\overline{K(B)}$ funkcje $\alpha_i, \beta_i$, gdzie $i = 1, \ldots, n$, wzorami:

$$\alpha_i(c) := \max\{0, \varepsilon_{c_i} - \|c - c_i\|\}, \qquad \beta_i(c) := \frac{\alpha_i(c)}{\sum_{i=1}^n \alpha_i(c)}$$

(ponieważ zbiory $B(c_i, \varepsilon_{c_i})$ pokrywają $\overline{K(B)}$, funkcje $\beta_i$ są dobrze zdefiniowane). Niech $F\colon \overline{B} \to X$ będzie określone wzorem

$$F(b) := \sum_{i=1}^n \beta_i(K(b)) D_{c_i}(K(b)).$$

Oznaczmy $D := \sum_{i=1}^n \beta_i(\cdot) D_{c_i}(\cdot)$. Mamy $F = D \circ K$ oraz $F(\overline{B}) = D(K(\overline{B})) \subset D(\overline{K(B)})$, przy czym ten ostatni zbiór jest zwarty (jako ciągły obraz zbioru zwartego); stąd $F$ jest odwzorowaniem zwartym. Dalej, $\beta_i(K(b)) \neq 0$ implikuje, że $K(b) \in B(c_i, \varepsilon_{c_i})$, więc $D_{c_i}(K(b)) \in \overline{B}$; stąd każde $F(b)$ jest kombinacją wypukłą punktów z $\overline{B}$, czyli $F(\overline{B}) \subset \overline{B}$. Z twierdzenia Schaudera otrzymujemy istnienie punktu stałego $b_0 \in \overline{B}$ odwzorowania $F$.

Rozważmy teraz operator liniowy $W\colon X \to X$ dany wzorem

$$W := \sum_{i=1}^n \beta_i(K(b_0)) D_{c_i} \circ K.$$

Oczywiście, $W$ jest operatorem liniowym zwartym komutującym z $T$. Zbiór $L := \{y \in X : W(y) = y\}$ jest domkniętą podprzestrzenią liniową; $L \neq \{0\}$, gdyż $b_0 \in L$ (i $b_0 \neq 0$); nie może też być $L = X$, bo $W$ jest operatorem liniowym zwartym, a $X$ – przestrzenią nieskończeniewymiarową. Wreszcie, $L$ jest $T$-niezmiennicza: gdy $y \in L$, mamy $W(Ty) = T(Wy) = Ty$, więc $Ty \in L$. Dowód (i referat) jest zakończony. $\square$