Twierdzenia o punktach stałych dla operatorów w przestrzeniach metrycznych hiperwypukłych

Marcin Borkowski

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

5. stycznia 2007

Definicja

Definicja (Aronszajn–Panitchpakdi, 1956)

Przestrzeń metryczną nazywamy hiperwypukłą, gdy każda rodzina kul domkniętych $\{\overline{B}(x_i, r_i)\}_{i \in I}$ spełniająca warunek

$$d(x_i, x_j) \leqslant r_i + r_j \quad \text{dla } i, j \in I$$

ma niepusty przekrój.

Uwaga

Dla przestrzeni unormowanych, hiperwypukłość oznacza, że każda rodzina kul domkniętych przecinających się parami ma niepusty przekrój.

Przykłady

Przykład

Następujące przestrzenie metryczne są hiperwypukłe:

- $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{R}^n$ z normą „maksimum”;
- l^∞ oraz $L^\infty(\mathbb{R})$;
- $C_{\mathbb{R}}(K)$, gdzie K jest zwartą i ekstremalnie niespójną przestrzenią topologiczną Hausdorffa;
- $\mathbb{R}^2$ z metryką „rzeka” lub z metryką „metra paryskiego”.

Przykłady

Twierdzenie

Jeśli C jest podzbiorem Czebyszewa rzeczywistej przestrzeni unormowanej X, zaś d_C jest hiperwypukłą metryką na C, to funkcja d określona wzorami:

$$d(x,y) = \begin{cases} \|x-y\|, \\ \qquad \text{gdy } P_C(x) = P_C(y) \\ \qquad \text{oraz punkty } x, P_C(x), y \text{ są współliniowe;} \\ \|x - P_C(x)\| + d_C(P_C(x), P_C(y)) + \|P_C(y) - y\| \\ \qquad \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

jest hiperwypukłą metryką na X.

Motywacje

Dlaczego przestrzenie metryczne hiperwypukłe są interesujące?

Motywacje

Dlaczego przestrzenie metryczne hiperwypukłe są interesujące?

Z punktu widzenia analizy matematycznej:

przestrzenie hiperwypukłe są metrycznym odpowiednikiem przestrzeni Hahna–Banacha. Innymi słowy, dowolne odwzorowanie Lipschitza z podzbioru przestrzeni metrycznej X do przestrzeni hiperwypukłej H można rozszerzyć na całą przestrzeń X z zachowaniem stałej Lipschitza.

Motywacje

Dlaczego przestrzenie metryczne hiperwypukłe są interesujące?

Z punktu widzenia topologii:

przestrzenie hiperwypukłe są nierozszerzającymi retraktami absolutnymi. Innymi słowy, jeśli H jest hiperwypukłą podprzestrzenią przestrzeni metrycznej X, to istnieje nierozszerzająca retrakcja $R\colon X \to H$.

Motywacje

Dlaczego przestrzenie metryczne hiperwypukłe są interesujące?

Z punktu widzenia teorii punktu stałego:

wiele klasycznych twierdzeń o punktach stałych (twierdzenia typu Browdera–Goehde'a–Kirka, Schaudera, Darbo, Krasnosielskiego,. . .) ma swoje hiperwypukłe odpowiedniki – zarówno jedno-, jak i wielowartościowe.

Motywacje

Dlaczego przestrzenie metryczne hiperwypukłe są interesujące?

Z punktu widzenia teorii punktu stałego:

wiele klasycznych twierdzeń o punktach stałych (twierdzenia typu Browdera–Goehde'a–Kirka, Schaudera, Darbo, Krasnosielskiego,...) ma swoje hiperwypukłe odpowiedniki – zarówno jedno-, jak i wielowartościowe.

Twierdzenie (Baillon, 1988)

Niech $F\colon H \to H$ będzie nierozszerzającym odwzorowaniem ograniczonej przestrzeni hiperwypukłej w siebie. Wówczas F ma punkt stały; ponadto, zbiór punktów stałych odwzorowania F jest hiperwypukły.

Hiperwypukłość a wypukłość

Czym różni się hiperwypukłość od wypukłości?

Hiperwypukłość a wypukłość

Czym różni się hiperwypukłość od wypukłości?

- zbiory wypukłe nie muszą być hiperwypukłe
- i na odwrót.

Mimo to, wiele własności zbiorów wypukłych przenosi się na przestrzenie hiperwypukłe, choć dowody wymagają często innych, subtelniejszych technik.

Hiperwypukłość a wypukłość

Czym różni się hiperwypukłość od wypukłości?

- zbiory wypukłe nie muszą być hiperwypukłe
- i na odwrót.

Mimo to, wiele własności zbiorów wypukłych przenosi się na przestrzenie hiperwypukłe, choć dowody wymagają często innych, subtelniejszych technik.

- Przekrój rodziny zbiorów hiperwypukłych nie musi być hiperwypukły;
- przekrój łańcucha przestrzeni hiperwypukłych ograniczonych jest za to niepusty i hiperwypukły;
- zatem „powłoka hiperwypukła" istnieje, choć jest jednoznaczna tylko z dokładnością do izometrii.

Dotychczas uzyskane wyniki

Twierdzenie (typu Krasnosielskiego)

Załóżmy, że H jest niepustym, hiperwypukłym i słabo zwartym podzbiorem przestrzeni unormowanej X, zaś F_1 i F_2 są takimi odwzorowaniami z H do rodziny niepustych i zwartych podzbiorów X, że:

(i) *F_1 jest silnie ciągłe;*

(ii) *F_2 jest nierozszerzające (w sensie metryki Hausdorffa);*

(iii) *$F = F_1 + F_2$ jest hemizwarte;*

(iv) *$F(x)$ jest wypukłym podzbiorem H dla dowolnego $x \in H$.*

Wówczas istnieje takie $x \in H$, że $x \in F(x)$.

Dotychczas uzyskane wyniki

Twierdzenie

Niech X będzie przestrzenią metryczną hiperwypukłą, zaś Ω jej niepustym i otwartym podzbiorem. Załóżmy, że istnieje taka ciągła homotopia $H\colon [0,1] \times \overline{\Omega} \to X$, że:

(i) *odwzorowanie $H(0,\cdot)$ ma subaddytywny moduł ciągłości oraz jego zbiór wartości jest podzbiorem pewnego hiperwypukłego i zwartego podzbioru V przestrzeni $\overline{\Omega}$;*

(ii) *żadne z odzworowań $H(\lambda,\cdot)$, gdzie $\lambda \in [0,1)$ nie ma punktów stałych na brzegu zbioru Ω;*

(iii) *każdy taki podzbiór $C \subset \Omega$, że $C = \Omega \cap P$ dla pewnej powłoki hiperwypukłej P zbioru $H([0,1] \times C) \cup V$ jest relatywnie zwarty.*

Wówczas istnieje takie $x \in \overline{\Omega}$, że $x = H(1,x)$.

Dotychczas uzyskane wyniki

Twierdzenie (typu Leray–Schaudera)

Niech X będzie przestrzenią liniowo-metryczną, $H \subset X$ hiperwypukłym podzbiorem X, a $\Omega \subset H$ podzbiorem otwartym w H. Niech $R\colon X \to H$ będzie ciągłą retrakcją na H, przy czym $R(0) \in \overline{\Omega}$. Wówczas każde odwzorowanie ciągłe i zwarte $F\colon \overline{\Omega} \to X$ ma co najmniej jedną z poniższych własności:

(i) *F ma punkt stały;*

(ii) *istnieją takie $x \in \partial\Omega$ i $\lambda \in [0,1)$, że $x = R(\lambda F(x))$.*

Dotychczas uzyskane wyniki

Twierdzenie (typu Darbo)

Niech H będzie ograniczoną przestrzenią hiperwypukłą, a $F\colon H \to 2^H \setminus \{\emptyset\}$ multifunkcją półciągłą z góry o wartościach będących przekrojami rodzin kul domkniętych. Załóżmy ponadto, że istnieją: stała $q \in (0,1)$ oraz skończony zbiór $C \subset H$ takie, że $\alpha(F(A)) \leqslant q\alpha(A)$ dla dowolnego $A \subset H$, gdzie α jest miarą niezwartości Kuratowskiego, oraz $F(x) \cap C \neq \emptyset$ dla dowolnego $x \in H$.

Wówczas istnieje takie $x \in H$, że $x \in F(x)$.

Dziękuję.