

Zadania powtórkowe z indukcji matematycznej oraz ciągów arytmetycznych i geometrycznych

1. Udowodnij, że dla $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi wzór: $1 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$.
2. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n spełniona jest nierówność: $3^n \geq 2^n + 1$.
3. Wykaż, że liczba $4^n + 15n - 1$ jest podzielna przez 9 dla $n \in \mathbb{N}$.
4. Udowodnij, że n -kąt foremny ($n \geq 3$) ma $\frac{1}{2}n(n-3)$ przekątnych.
5. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie:

$$a_n = \begin{cases} a_1 = 9, \\ a_{n+1} = a_n + 8n \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}_+. \end{cases}$$

Wykaż, że $a_n = (2n+1)^2$ dla $n \in \mathbb{N}_+$.

6. Czy w ciągu (a_n) , określonym wzorem $a_n = \frac{n-1}{n+1}$, występuje liczba 1?
7. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) , gdzie $a_n = \frac{3n+2}{5n+3}$.
8. Udowodnij, że ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = n^2 - 20n + 19$ nie jest monotoniczny.
9. Czy ciąg (a_n) dany wzorem $a_n = \frac{3n-1}{2}$ jest arytmetyczny?
10. Pokaż, że jeśli ciąg (a_n) jest arytmetyczny, to ciąg (b_n) o wyrazie ogólnym $b_n = 3a_n - 2$ również jest arytmetyczny.
11. Zegar wybija pełne godziny. Ile uderzeń wybije w ciągu doby?
12. Rozwiąż równanie $1 + 4 + 7 + \dots + (1 + 3n) = 176$.
13. Czy ciąg (a_n) , określony wzorem $a_n = (\sqrt{2})^n$, jest geometryczny?
14. Zbadaj, czy ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{(-1)^n n}{n-1}$ jest arytmetyczny bądź geometryczny.
15. Czy ciąg skończony $(3 - 2\sqrt{2}, 10 - 7\sqrt{2}, 34 - 24\sqrt{2})$ jest geometryczny?
16. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x) = x^8 + x^7 + \dots + x^2 + x + 1$ przez dwumian $(x+2)$, nie wykonując dzielenia wielomianów ani nie sumując więcej niż trzech liczb.
17. Czy każdy ciąg dwuwyzrazowy jest arytmetyczny? A geometryczny?
18. Czy ciąg trójwyzrazowy może być jednocześnie arytmetyczny i geometryczny?
19. Dane są ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach ogólnych $a_n = \frac{3n}{n+1}$, $b_n = \frac{2n-1}{n+1}$. Oblicz granicę ciągu (c_n) o wyrazie ogólnym $c_n = 2a_n - 3b_n$.
20. Napisz dwa ciągi (a_n) oraz (b_n) , rozbieżne, ale o tej własności, że ich suma jest ciągiem zbieżnym do $\sqrt{2}$.
21. Zamień liczbę 2,3121212... na ułamek zwykły.
22. Ciąg (a_n) jest zadany rekurencyjnie: $a_1 = 1$ oraz $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + 2)$ dla $n \geq 2$. Udowodnij, że jest on zbieżny, i znajdź jego granicę.
23. Rozwiąż równanie:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} + \dots = 2x - 1.$$

24. Wylicz granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 3n - 1}{4n^2}$.
25. Ile to jest $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{n})^{2n}$?
26. Wyznacz granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n - 1}{a_n + 1}$, wiedząc, że (a_n) jest zbieżnym ciągiem geometrycznym, w którym występują zarówno wyrazy dodatnie, jak i ujemne.

Niniejszy dokument jest chroniony prawem autorskim.

Opublikowałem go w nadziei, że komuś się przyda.

Nie wolno go zmieniać, ale nieodpłatne rozpowszechnianie i używanie jest dozwolone i wskazane.

Jeśli znajdziesz w nim błędy lub masz pomysł, jak go ulepszyć, będę wdzięczny za uwagi.

Dysklejmer: używasz tego dokumentu wyłącznie na swoją odpowiedzialność.

Nie poczuwam się do najmniejszej odpowiedzialności za jakiegokolwiek uszkodzenia ciała i/lub psychiki wywołane jego lekturą.

Marcin Borkowski (<http://mbork.faculty.fmcs.amu.edu.pl>).